782

MPH-03

June - Examination 2016

M.Sc. (Previous) Physics Examination

Quantum Mechanics

क्वांटम यांत्रिकी

Paper - MPH-03

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions. Check your paper code and paper title also before starting the paper.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' तथा 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। पेपर शुरु करने से पूर्व अपना प्रश्नपत्र कोड व प्रश्नपत्र शीर्षक जाँच ले।

Section - A $8 \times 2 = 16$

Very Short Answer Questions (Compulsory)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the questions you delimit your answers in One word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 2 marks.

खण्ड – 'अ'

अति लघु उत्तरीय प्रश्न (अनिवार्य)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1) (i) An electron is in a state described by the spinwave function in the S_z - basis as $x = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. What is the probability that the electron has spin up?

एक इलेक्ट्रान का स्पिन तरंगफलन, S_z - बेसिस में $x = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ है। इलेक्ट्रॉन की स्पिन अप में होने की प्रायिकता क्या होगी?

(ii) What is a Hermitian operator? If C and D are two arbitary Hermitian operators, then find whether CDC is Hermitian or NOT. Answer 'Yes' or 'No'.
हर्मीशियन संकारक क्या होता है? यदि C तथा D दो स्वेच्छ हर्मीशियन संकारक हैं, तो क्या संकारक CDC भी हर्मीशियन होगा? उत्तर 'हाँ' या 'ना' में दें।

(iii) Using the rules of bra-ket algebra, prove $Tr(XY) = Tr(YX)$, where X and Y are operators and Tr is the abbreviation for Trace.
ब्रा–केट एलजेबरा का उपयोग करते हुए सिद्ध करो कि $Tr(XY) = Tr(YX)$, यहाँ पर X तथा Y संकारक हैं तथा, Tr मेट्रिक्स का ट्रेस प्रदर्शित करता है।

(iv) Express the Hamiltonian of a linear simple harmonic oscillator in terms of annihilation operator a and creation operator a^+.
एक रेखीय सरल आवर्त दोलित्र का हेमिल्टोनिअम एनिहिलेशन ऑपरेटर a तथा क्रिएशन ऑपरेटर a^+ के रूप में व्यक्त करो।

(v) For Pauli matrices, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ what is the value of $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$?
पाउली मेट्रिक्स $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ के लिये $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$? का मान ज्ञात क्या होगा?

(vi) Write the angular momentum operator L_Z in spherical polar coordinates.
कोणीय संवेग संकारक L_Z को गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में लिखो।

(vii) Write the ground state wave function of harmonic oscillator. Plot the wave function.
सरल आवर्त दोलित्र का निम्मतम ऊर्जा अवस्था का तरंग फलन लिखें। इस तरंग फलन का ग्राफिकल चित्र दें।

(viii) What is a stationary state? Write the wave function of the stationary state of a free particle.
क्वान्टम निकाय की 'स्थिर' (स्थायी) अवस्था क्या है? किसी मुक्त कण की स्थायी (स्थिर) अवस्था के तरंग फलन को लिखें।

Section - B $4 \times 8 = 32$

Short Answer Questions

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 8 marks.

(खण्ड – ब)

लघुत्तरात्मक प्रश्न

निर्देश : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 200 शब्दों में दीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

2) Using the rules of bra-ket algebra, prove that
$(XY)^+ = Y^+X^+$, where X and Y are operators.

ब्रा–केट एलजेब्रा के नियमों का उपयोग करते हुए सिद्ध करो कि
$(XY)^+ = Y^+X^+$, जहाँ पर X तथा Y संकारक हैं।

3) Prove the following commutation relations:

(i) $[L_x, L_y] = i\hbar\, Lz$

(ii) $[L^2, L_z] = 0$

निम्न क्रमविनिमय सम्बन्ध को सिद्ध करो।

(i) $[L_x, L_y] = i\hbar\, Lz$

(ii) $[L^2, L_z] = 0$

4) Find the energy eigenvalues and eigen functions of a particle in a one dimensional infinite deep well of width a; the motion takes place only between the points $x = 0$ and $x = a$.

विस्तार a के तथा अनंत गहराई के एक विभीय विभव कूप में निहित कण के ऊर्जा आइगन फलन तथा ऊर्जा आइगन मान ज्ञात करो। कण की गति बिन्दु $x = 0$ तथा $x = a$ मध्य है।

5) Set up the schrodinger wave equation for a one-dimensional harmonic oscillator. Plot the wave functions $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ of harmonic oscillator.
एक विभीय सरल आवर्त दोलित्र के लिये श्रोडिंजर समीकरण प्राप्त करें। आवर्त दोलित्र के तरंग फलनों $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$ को बताओ।

6) Prove the relation
$(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ where σ′s are the Pauli spin matrices, if the components of $\vec{A}$ and $\vec{B}$ Commute with those of $\vec{\sigma}$.
सिद्ध करो कि $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$
जहाँ पर $\vec{\sigma} \equiv (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ पाउली स्पिन मेट्रिक्स प्रदर्शित करते हैं, तथा सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के घटक $\vec{\sigma}$ के घटकों से कम्यूट करते हैं।

7) Obtain the solution of radial equation of hydrogen atom. Find energy eigenvalues for hydrogen atom.
हाइड्रोजन परमाणु के लिये रेडिअल (त्रिज्यीय) समीकरण का हल प्राप्त करें। हाइड्रोजन परमाणु के लिये ऊर्जा आइगन मान प्राप्त करें।

8) Show that the first order perturbation energy connection for a non-degenerate system is the expectation value of the perturbed Hamiltonian over the unperturbed state of the system.
सिद्ध करो कि किसी नॉन–डिजेनेरेट क्वांटम निकाय के लिये प्रथम कोटि का ऊर्जा आइगन मान में विक्षोम के कारण होने वाला संशोधन निकाय के अविक्षोभित अवस्था पर विक्षोभित हेमिल्टोनियन के प्रत्याशा मान ही है।

9) (i) Define an unitary operator.

(ii) An operator corresponding to infinitesimal transformation can be expressed as $\hat{U} \approx 1 + i\varepsilon \hat{F}$, where ε is infinitesimal. Show that $\hat{U}$ is unitary if the operator $\hat{F}$ is Hermitian.
यूनिटरी ओपरेटर को परिभाषित करो।
एक ओपरेटर $\hat{U}$ अतिसूक्ष्म रुपान्तरण के लिये निम्न रुप में व्यक्त किया जा सकता है $\hat{U} \approx 1 + i\varepsilon \hat{F}$, जहाँ पर अति सूक्ष्म राशि है। सिद्ध करो कि ओपरेटर $\hat{U}$ यूनिटरी तभी होगा जबकि ओपरेटर $\hat{F}$ हर्मिशियन हो।

Section - C $2 \times 16 = 32$

Long Answer Questions

Note: Answer **any two** questions. Each answer should not exceed 500 words. Each question carries 16 marks.

(खण्ड – स)

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

निर्देश : किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिये। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) Find energy eigenvalues and eigenfunctions of a one-dimensional simple-harmonic oscillator.
एक विभीय सरल आवर्त दोलित्र के लिए ऊर्जा आइगन मान तथा ऊर्जा आइगन फलन प्राप्त करें।

11) Using commutation rules for angular momentum $\vec{J}$, find out the eigenvalues of J^2 and J_Z.

कोणीय संवेग $\vec{J}$, के लिये विनिमय सम्बन्ध का उपयोग करते हुए J^2, J_Z के आइगन मान को प्राप्त करें।

12) If a and a^+ are two operators which satisfy the commutation rule $[a, a^+] = 1$ then prove that

(i) $a^+ a \,|\, n\rangle = n \,|\, n\rangle$, where n is positive integer

(ii) $a \,|\, n\rangle = \sqrt{n} \,|\, n-1\rangle$

(iii) $a^+ \,|\, n\rangle = \sqrt{n+1} \,|\, n+1\rangle$

यदि a तथा a^+ दो संकारक हैं जो कि निम्न विनिमय संबंध सन्तुष्ट करते हैं:

$[a, a^+] = 1$, तो सिद्ध करें कि

(i) $a^+ a \,|\, n\rangle = n \,|\, n\rangle$, जहाँ पर n एक धनात्मक पूर्णांक है।

(ii) $a \,|\, n\rangle = \sqrt{n} \,|\, n-1\rangle$

(iii) $a^+ \,|\, n\rangle = \sqrt{n+1} \,|\, n+1\rangle$

13) A particle in an impenetrable potential box with walls at $x = 0$ and $x = a$ has the following wave function at some initial times:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin\frac{\pi x}{a} + \frac{3}{\sqrt{5a}} \sin\frac{3\pi x}{a}.$$

(i) What are the possible results of the measurement of energy and with what probability would they occur?

(ii) Suppose immediately after a measurement, energy is remeasured. What are now the relative possibilities of the possible outcomes?

एक कण किसी अभेद्य बॉक्स में निहित है। बॉक्स की दीवारें $x = 0$ तथा $x = a$ पर स्थित हैं। बॉक्स में निहित कण का तरंगफलन किसी प्रारंभिक क्षण पर

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5a}} \sin\frac{\pi x}{a} + \frac{3}{\sqrt{5a}} \sin\frac{3\pi x}{a}$$

से दिया गया है।

(i) कण की ऊर्जा मापन में संभावित मान क्या होंगे तथा उनके मापन में मिलनेवाले मान की क्या प्रायिकता है?

(ii) यदि ऊर्जा मापन के तत्पश्चात पुनः ऊर्जा मापन किया जाये तो मिलनेवाले संभावित मानों की क्या सापेक्षिक प्रायिकता होगी?